



TITLE:

# HOROCYCLIC EVOLUTOIDS (Singularity theory of differential maps and its applications)

AUTHOR(S):

青砥, 禎彦

---

CITATION:

青砥, 禎彦. HOROCYCLIC EVOLUTOIDS (Singularity theory of differential maps and its applications). 数理解析研究所講究録 2017, 2049: 109-115

ISSUE DATE:

2017-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/237056>

RIGHT:

# HOROCYCLIC EVOLUTOIDS

東京工業大学理学院数学系 青砥 禎彦

AOTO Yosihiko

Department of Mathematics

Tokyo Institute of Technology

## 1 序

$\sigma$  を平面曲線とする. 曲線  $\sigma$  の曲率中心の軌跡を  $\sigma$  の縮閉線と呼んだ. 曲線  $\sigma$  の法線族の包絡線は  $\sigma$  の縮閉線と一致する. ここで  $\alpha \in \mathbb{R}$  を 1 つ取り固定する. 曲線  $\sigma$  上の各点において, 接線との成す角が  $\alpha$  となるように直線をひく. ただし角度は反時計回りを正とする. この直線族の包絡線を **evolutoid** とよぶ ([6], [10] 参照). Giblin と Warder は論文 [5] において evolutoid の幾何学的性質を特異点論の手法を用いて調べた.

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円という. 泉屋-斐-佐野 [8] はホロ円を直線とみなす幾何学を展開した. このようにして得られる幾何学をホロ円的幾何学とよぶ. 本稿ではホロ円的幾何学において evolutoid を定義する.  $\gamma$  を双曲面上の曲線とする.  $\alpha \in \mathbb{R}$  を 1 つ取り固定する. 曲線  $\gamma$  上の各点において, 接線との成す角が  $\alpha$  となるようにホロ円を描く. このホロ円の族の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ. 本概説は, horocyclic evolutoid の幾何学的性質を特異点論の手法を用いて調べるものである.

## 2 ホロ円的幾何学

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円という. ホロ円を直線とみなす幾何学をホロ円的幾何学とよぶ ([8] 参照). 相異なる 2 点を通るホロ円はちょうど 2 本あるので, ホロ円的幾何学は結合公理を満たさない.

$\mathbb{R}^3$  上の擬内積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

によって定める. 3次元ミンコフスキー空間  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を  $\mathbb{R}_1^3$  で表す.

双曲面  $H_+^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_1 \geq 1\}$  は立体射影によりポワンカレ円板と同一視される.

次に  $\mathbb{R}_1^3$  上の擬外積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \left( - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

によって定める.

以下では  $I$  によって開区間を表すものとする.

$\gamma: I \rightarrow H_+^2$  を単位速度曲線とする.  $\gamma$  の測地的曲率を  $\kappa_g(s)$  で表す.  $\kappa_g(s)$  は

$$\kappa_g(s) = |\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s)|$$

で与えられる. 単位接線ベクトル  $\gamma'(s)$  を  $\mathbf{t}(s)$  で表す. またベクトル  $\mathbf{e}(s)$  を  $\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \wedge \mathbf{t}(s)$  によって定める. このとき  $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$  は  $\gamma$  に沿う  $\mathbb{R}_1^3$  の擬正規直交枠をなす. 擬正規直交枠  $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$  に対して次の Frenet-Serret 型の公式

$$\begin{cases} \gamma'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) &= \gamma(s) + \kappa_g(s) \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{e}'(s) &= -\kappa_g(s) \mathbf{t}(s) \end{cases}$$

が成り立つ.

$\alpha \in \mathbb{R}$  を1つ取り固定する. このとき

$$\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) = \mathbf{t}(s) \cos \alpha + \mathbf{e}(s) \sin \alpha, \quad \mathbf{a}_{2,\alpha}(s) = -\mathbf{t}(s) \sin \alpha + \mathbf{e}(s) \cos \alpha$$

とおけば  $\{\gamma(s), \mathbf{a}_{1,\alpha}(s), \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)\}$  は  $\gamma$  に沿う  $\mathbb{R}_1^3$  の擬正規直交枠となる. 高さ関数  $H_\alpha: H_+^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$H_\alpha(\mathbf{x}, s) := \langle \mathbf{x}, \gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s) \rangle + 1$$

によって定める. また各  $s \in I$  に対して

$$\Gamma_\alpha(s) := \{\mathbf{x} \in H_+^2 \mid H_\alpha(\mathbf{x}, s) = 0\}$$

とおくと  $\Gamma_\alpha(s)$  はホロ円を表すことがわかる. ホロ円  $\Gamma_\alpha(s)$  は

$$\Gamma_\alpha(s) = \{\gamma(s) + u\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{u^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \mid u \in \mathbb{R}\}$$

とパラメータ表示される.

### 3 Horocyclic evolutoid の定義

$\gamma : I \rightarrow H_+^2$  を単位速度曲線とする.  $\alpha \in \mathbb{R}$  を 1 つ取り固定する. このとき各点  $\gamma(s)$  において, 曲線  $\gamma$  とホロ円  $\Gamma_\alpha(s)$  のなす角は  $\alpha$  であることがわかる. そこでホロ円の族  $\{\Gamma_\alpha(s)\}_{s \in I}$  の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ. とくに  $\alpha = \pm\pi/2$  のときをホロ円的縮閉線という. ホロ円的縮閉線は一葉によってはじめて定義された ([7, p. 16], [2, p. 65] 参照). Horocyclic evolutoid は  $H_\alpha$  の判別集合である.  $H_\alpha$  の判別集合を  $\mathcal{D}_{H_\alpha}$  で表すと

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{H_\alpha} &= \{\mathbf{x} \in H_+^2 \mid \exists s \in I \text{ s.t. } H_\alpha(\mathbf{x}, s) = \frac{\partial H_\alpha}{\partial s}(\mathbf{x}, s) = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in H_+^2 \mid \exists s \in I, \exists u \in \mathbb{R} \text{ s.t.} \\ &\quad \mathbf{x} = \gamma(s) + u\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{u^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \text{ かつ } \sin \alpha + u(\cos \alpha - \kappa_g(s)) = 0\} \end{aligned}$$

となる. ここで  $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$  と仮定する. このとき点  $s_0$  の近傍で定義された  $H_+^2$  上の曲線  $g_\alpha$  を

$$g_\alpha(s) := \gamma(s) - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \kappa_g(s)} \mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\sin^2 \alpha}{2(\cos \alpha - \kappa_g(s))^2} (\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s))$$

によって定める. 曲線  $g_\alpha$  は  $\mathcal{D}_{H_\alpha}$  のパラメータ表示を与える.

### 4 Horocyclic evolutoid の特異点

本節では horocyclic evolutoid の特異点について考察する.

$\alpha \in \mathbb{R}$  を 1 つ取り固定する. ここで

$$\delta_\alpha(s) := 2\kappa'_g(s) \sin \alpha - 2\kappa_g^2(s) \cos \alpha + (3\cos^2 \alpha + 1) \kappa_g(s) - \cos^3 \alpha - \cos \alpha$$

と定義する.

注意. もし  $\cos \alpha \neq \kappa_g(s)$  ならば [2, p. 60] において定義された不変量  $\delta[0]_1$  および  $\delta[0]_2$  について

$$\begin{aligned}\delta[0]_1(s) &= 0 \iff \delta_\alpha(s) = 0, \\ \delta[0]_2(s) &= 0 \iff \delta'_\alpha(s) = 0\end{aligned}$$

が成り立つ.

次の命題は芦野—藁—泉屋の結果の系として得られる ([2, Theorem 5.6] 参照).

**命題 4.1.**  $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$  とする. このとき

(i)  $g_\alpha : (I, s_0) \rightarrow H_+^2$  が正則な写像芽であるための必要十分条件は  $\delta_\alpha(s_0) \neq 0$  が成り立つことである.

(ii)  $g_\alpha : (I, s_0) \rightarrow H_+^2$  が  $3/2$  カスプに  $\mathcal{A}$  同値であるための必要十分条件は  $\delta_\alpha(s_0) = 0$  かつ  $\delta'_\alpha(s_0) \neq 0$  が成り立つことである.

## 5 Horocyclic evolutoid からなる曲面

次にパラメータ  $\alpha$  を動かす. 本節では, このとき得られる曲面の特異点について考察する.

$\mathcal{H} : H_+^2 \times \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha, s) := H_\alpha(\mathbf{x}, s)$  によって定める.  $s$  をパラメータとする曲面族  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha, s) = 0$  の包絡面  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{H}} &= \{(\mathbf{x}, \alpha) \in H_+^2 \times \mathbb{R} \mid \exists s \in I \text{ s.t. } \mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha, s) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}(\mathbf{x}, \alpha, s) = 0\} \\ &= \{(\mathbf{x}, \alpha) \in H_+^2 \times \mathbb{R} \mid \exists u \in \mathbb{R}, \exists s \in I \text{ s.t.} \\ &\quad \mathbf{x} = \gamma(s) + u\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{u^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \text{ かつ } \sin \alpha + u(\cos \alpha - \kappa_g(s)) = 0\}\end{aligned}$$

と表わされる. 平面  $\alpha = \text{定数}$  による包絡面  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  の切り口は horocyclic evolutoid である. ここで  $\cos \alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$  と仮定する. このとき点  $(s_0, \alpha_0)$  の近傍で定義された  $H_+^2 \times \mathbb{R}$  上の曲面  $X$  を

$$X(s, \alpha) := \left( \gamma(s) - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \kappa_g(s)} \mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\sin^2 \alpha}{2(\cos \alpha - \kappa_g(s))^2} (\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)), \alpha \right)$$

によって定める. 曲面  $X$  は  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  のパラメータ表示を与える.

## 5.1 包絡面 $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ の特異点

本節では包絡面  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  の特異点を調べる.

まず  $\cos \alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$  なる場合を考える. 点  $(s_0, \alpha_0)$  を曲面  $X$  の特異点とする.  $\delta(s, \alpha) := \delta_\alpha(s)$  とおくと  $\delta$  の零点集合と曲面  $X$  の特異点集合は一致する. したがって  $\delta(s_0, \alpha_0) = 0$  を得る. 特異点  $(s_0, \alpha_0)$  が非退化であるための必要十分条件は  $\delta_s(s_0, \alpha_0) \neq 0$  あるいは  $\delta_\alpha(s_0, \alpha_0) \neq 0$  が成り立つことである.

包含写像  $H_+^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  により  $H_+^2$  の接空間を  $\mathbb{R}^3$  の部分空間とみなす.  $X$  に沿う単位ベクトル場  $\nu$  を

$$\nu(s, \alpha) := \frac{1}{2(\kappa_g(s) - \cos \alpha) \sqrt{\kappa_g^2(s) - 2\kappa_g(s) \cos \alpha + 1}} \\ \times \begin{pmatrix} (\sin^2 \alpha - 2(\kappa_g(s) - \cos \alpha)^2) \mathbf{a}_{2,\alpha}(s, \alpha) + 2(\kappa_g(s) - \cos \alpha) \sin \alpha \mathbf{a}_{1,\alpha}(s, \alpha) + \sin^2 \alpha \gamma(s) \\ 2(\kappa_g(s) - \cos \alpha)(\sin \alpha) \end{pmatrix}$$

によって定める. ベクトル場  $\nu$  は単位法線ベクトル場を定義する. 芽  $(X, \nu) : (\mathbb{R}^2, (s_0, \alpha_0)) \rightarrow T_1(H_+^2 \times \mathbb{R})$  ははめ込みであり, したがって  $X : (\mathbb{R}^2, (s_0, \alpha_0)) \rightarrow H_+^2 \times \mathbb{R}$  は波面芽となる.

[9, Proposition 1.3] により以下の定理を得る.

**定理 5.1(A).**  $\cos \alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$  とし点  $(s_0, \alpha_0)$  を曲面  $X$  の非退化な特異点とする. このとき

(i)  $X : (\mathbb{R}^2, (s_0, \alpha_0)) \rightarrow H_+^2 \times \mathbb{R}$  がカスプ状曲面に  $\mathcal{A}$  同値であるための必要十分条件は  $\delta_s(s_0, \alpha_0) \neq 0$  が成り立つことである.

(ii)  $X : (\mathbb{R}^2, (s_0, \alpha_0)) \rightarrow H_+^2 \times \mathbb{R}$  がツバメの尾に  $\mathcal{A}$  同値であるための必要十分条件は  $\delta_s(s_0, \alpha_0) = 0$  かつ  $\delta_{ss}(s_0, \alpha_0) \neq 0$  が成り立つことである.

$(\mathbf{x}_0, \alpha_0) \in H_+^2 \times \mathbb{R}$  を 1 つ取り固定する.  $s_0 \in I$  とする. 芽  $h_{(\mathbf{x}_0, \alpha_0)} : (I, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $h_{(\mathbf{x}_0, \alpha_0)}(s) := \mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \alpha_0, s)$  によって定める. 芽  $\mathcal{H} : (H_+^2 \times \mathbb{R} \times I, (\mathbf{x}_0, \alpha_0, s_0)) \rightarrow \mathbb{R}$  は芽  $h_{(\mathbf{x}_0, \alpha_0)}$  の 3 次元開折である.

次に  $\cos \alpha_0 = \kappa_g(s_0)$  なる場合を考える.  $\sin \alpha_0 = 0$ ,  $\kappa'_g(s_0) \neq 0$  とする. このとき  $h_{(\gamma(s_0), \alpha_0)}$  は  $A_2$  型であり, 普遍開折定理 ([4, p. 149] 参照) により  $\mathcal{H}$  は  $h_{(\gamma(s_0), \alpha_0)}$  の  $\mathcal{R}$  普遍開折となる.

したがって判別集合の一意性 ([4, p. 150] 参照) により以下の定理を得る.

定理 5.1(B).  $\cos \alpha_0 = \kappa_g(s_0)$ ,  $\sin \alpha_0 = 0$ ,  $\kappa'_g(s_0) \neq 0$  とする. このとき曲面  $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  は点  $(\gamma(s_0), \alpha_0)$  においてカusp状曲面となる.

## 5.2 等位集合

関数  $f: \mathcal{D}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x, \alpha) := \alpha$  によって定める. 関数  $f$  の等位集合は horocyclic evolutoid である. 本節では,  $f$  の等位集合が  $\alpha$  によってどのように変化するのかを調べる.

アーノルドの結果 ([1, Theorem 4.3, Corollary 4.5], [3, p. 89] 参照) を適用し以下を得る.

定理 5.2. (A)  $\cos \alpha_0 \neq \kappa_g(s_0)$  とする.

- (i)  $\delta(s_0, \alpha_0) = 0$  かつ  $\delta_s(s_0, \alpha_0) \neq 0$  とする. このとき点  $X(s_0, \alpha_0)$  の近くを通る  $f$  の等位集合はすべて  $3/2$  カuspとなる.
  - (ii)  $\delta(s_0, \alpha_0) = \delta_s(s_0, \alpha_0) = 0$ ,  $\delta_{ss}(s_0, \alpha_0) \neq 0$ ,  $\delta_\alpha(s_0, \alpha_0) \neq 0$  とする. 点  $X(s_0, \alpha_0)$  を中心にして  $f$  の等位集合を動かすとき swallowtail transition が生ずる.
- (B)  $\cos \alpha_0 = \kappa_g(s_0)$ ,  $\sin \alpha_0 = 0$ ,  $\kappa'_g(s_0) \neq 0$  とする. 点  $(\gamma(s_0), \alpha_0)$  を中心にして  $f$  の等位集合を動かすとき beaks transition が生ずる.

## 参考文献

1. Arnol'd, V. I., *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 557–582.
2. Ashino, T., Ichiwara, H., and Izumiya, S., *Envelopes of slant lines in the hyperbolic plane*, Note Mat. 35 (2015), 51–67.
3. Bruce, J. W., and Giblin, P. J., *Families of spheres (and circles)*, Singularities (Warsaw, 1985), 85–102, Banach Center Publ., 20, PWN, Warsaw, 1988.
4. Bruce, J. W., and Giblin, P. J., *Curves and singularities*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
5. Giblin, P. J., and Warder, J. P., *Evolving Evolutoids*, Amer. Math. Monthly 121 (2014), 871–889.
6. Hamann, M., *A note on ovals and their evolutoides*, Beiträge Algebra Geom. 50 (2009), 433–441.

7. 一葉 久俊, 双曲平面におけるホロ円の 1 径数族の包絡線について, 北海道大学修士論文, 2008.
8. Izumiya, S., Pei, D., and Sano, T., *Singularities of hyperbolic Gauss maps*, Proc. London Math. Soc. 86 (2003), 485–512.
9. Kokubo, M., Rossman, W., Saji, K., Umehara, M., and Yamada, K., *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. 221 (2005), 303–351.
10. Wunderlich, W., *Über die Evolutoiden der Ellipse*, Elem. Math. 10 (1955), 37–40.